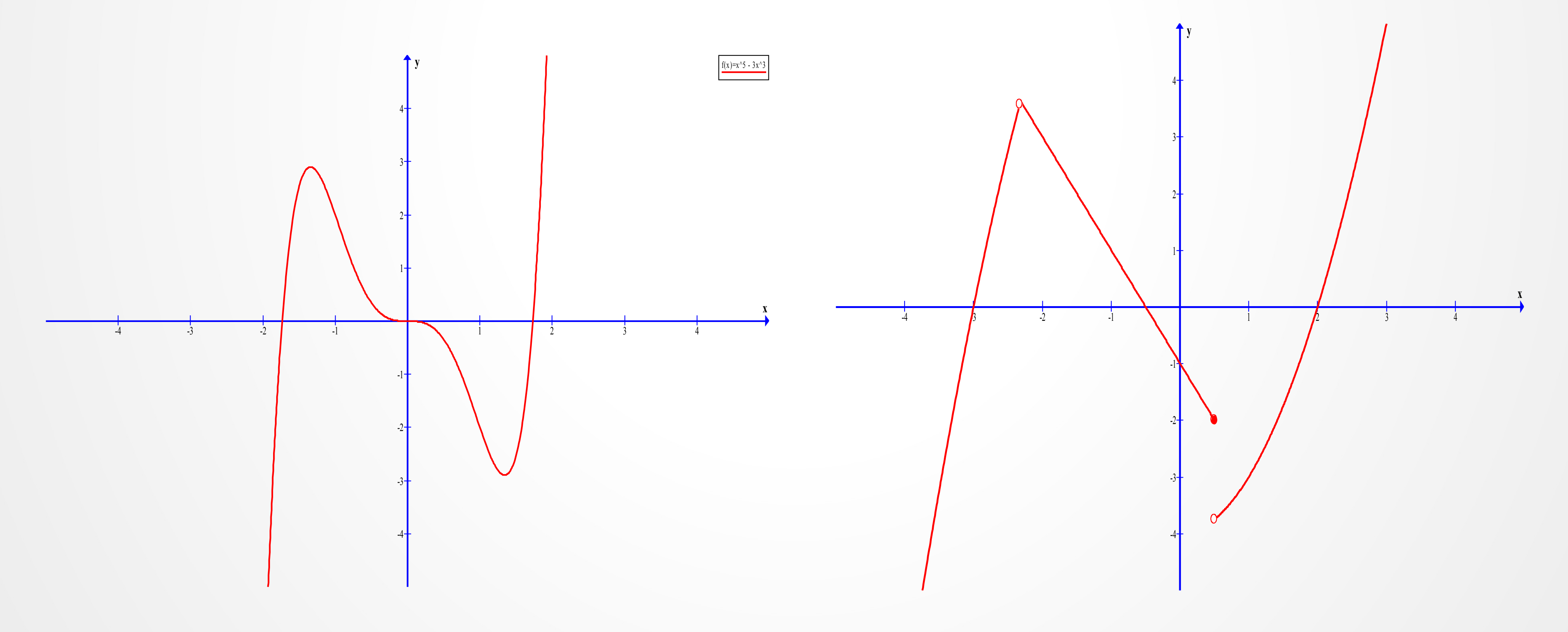


Cálculo I

Continuidade

- A continuidade de uma função está relacionada com a presença ou ausência de “quebras” no seu gráfico.



Definição

- Uma função f é contínua em um número c se satisfaz as seguintes condições:

(i) $f(c)$ é definida

(ii) $\lim_{x \to c} f(x)$ existe

(iii) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

- Se uma (ou mais) das três condições não forem verificadas em c, a função f será ***descontínua*** em c.

Exemplo 1

- Vamos analisar as funções:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & , \quad x \neq 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$

Motivação

O estudo da continuidade de funções é importante para:

- Descrição de fenômenos físicos:há para todos os gostos, contínuos, descontínuos ou ambos;
- Métodos numéricos: determinação de zeros de funções;
- Geometria e a Mecânica dos meios contínuos
- Suporte para uma imensidão de teoremas da matemática

Teorema 1

- Se f e g são funções contínuas em c, então são também contínuas em c:

  (i) a soma $f + g$

  (ii) a diferença $f - g$

  (iii) o produto $f.g$

  (iv) o quociente f/g, desde que $g(c) \neq 0$

Teorema 2

(i) Uma função polinomial é contínua em qualquer ponto

(ii) Uma função racional é contínua em qualquer ponto do seu domínio

Exemplos 2

a) Mostre que a função f(x) = |x| é contínua em todo número real c.

b) Se $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 2x}$ determine as

descontinuidade de f.

Exemplos 3

- Em cada caso, esboce o gráfico, identifique o ponto em que ocorre a descontinuidade e mostre , sob a luz da definição, porque a função não é contínua naquele ponto:

$$a)\ g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

$$b)\ h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

$$c)\ f(x) = \frac{1}{x}$$

$$d)\ p(x) = \frac{|x|}{x}$$

Teorema 3

- Se $\lim_{x \to c} g(x) = b$ e se a função f for contínua em b, então $\lim_{x \to c} (f \circ g)(x) = f(b)$

  ou, de forma equivalente

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(\lim_{x \to c} g(x))$$

Teorema 4

- Se a função g é contínua em c e a função f é contínua em b=g(c), então a função composta $f \circ g$ é contínua em c.

Exemplo 4

- Mostre que as funções abaixo são contínuas em qualquer ponto do seu domínio.

$$a)\, f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$$

$$b)\, f(x) = \frac{x^{2/3}}{1 + x^4}$$

Continuidade

Continuidade em um intervalo

Definição

- Dizemos que uma função é **contínua em um intervalo aberto**, se e somente se, ela for continua em todos os pontos desse intervalo aberto.

Definição

- Seja f definida num intervalo fechado [a,b].

(i) Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, dizemos que f é *contínua à direita* no ponto *a*.

(ii) Se $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$, dizemos que f é *contínua à esquerda* no ponto b.

(iii) Se f é contínua em todo ponto do intervalo aberto (a,b), f é contínua à direita em *a* e contínua à esquerda em *b*, dizemos que f é contínua no intervalo fechado [a,b]

Exemplo 5

- Prove que a função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é contínua no intervalo fechado [-2,2]

Teorema do Valor Intermediário

- Se f é contínua no intervalo fechado [a,b] e L é um número tal que $f(a) \leq L \leq f(b)$ ou $f(b) \leq L \leq f(a)$ então existe pelo menos um $x \in [a,b]$ tal que f(x) = L.

- Uma consequência do teorema do valor intermediário é que se f(a) e f(b) têm sinais opostos, então existe um número c entre a e b tal que f(c) = 0; isto é, f tem um zero em c.

Exemplo 6

- a) Mostre que $f(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x - 3$ tem um zero entre 1 e 2.

- b) Mostre que há uma raiz da equação $x^3 - x - 1 = 0$ entre 1 e 2.

- c) Utilize o TVI para provar que a equação $\sqrt{2x+5} = 4 - x^2$ tem uma solução

Teorema 5

- Se uma função f é contínua e não tem zeros em um intervalo, então ou $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ para todo x no intervalo.